

# 电子器件低频噪声谱成分的全参数优化分析

庄奕琪 孙 青

(西安电子科技大学微电子研究所, 西安 710071)

侯 询

(中国科学院西安光学精密机械研究所, 西安 710068)

**摘要** 本文提出的梯度寻优-线性展开算法, 可从电子器件低频噪声频谱中提取得到 $1/f$  噪声、 $g-r$  噪声和白噪声的全部6个谱成分参数值。将该方法成功地用于半导体器件低频噪声谱成分分析, 表明其具有广泛的收敛性和较高的拟合精度。

**关键词:** 低频噪声 电子器件 优化分析

## 1 引言

电子器件的噪声通常由 $1/f$  噪声、 $g-r$  噪声和白噪声3种成分构成。存在一种  $g-r$  噪声分量时, 其功率谱密度可以写成为

$$S(f) = A + \frac{B}{f^\gamma} + \frac{C}{1 + (f/f_0)^\alpha} \quad (1)$$

共有6个表征参数, 即白噪声的幅度  $A$ 、 $1/f$  噪声的幅度  $B$  和频率指数因子  $\gamma$ 、 $g-r$  噪声的幅度  $C$ 、转折频率  $f_0$  和指数因子  $\alpha$ 。不同的噪声分量以及各个分量的不同表征参数往往具有不同的物理意义, 对应于器件的不同结构特征与缺陷量<sup>[1-2]</sup>。例如,  $1/f$  噪声主要表征表面缺陷,  $g-r$  噪声表征体内缺陷, 白噪声则可能反映热缺陷。因此, 从实测噪声频谱中分离出各种噪声分量。并精确地确定各个分量表征参数的值, 是对器件进行噪声物理分析的前提<sup>[3]</sup>。若不存在  $g-r$  成分 (即  $C=0$ ), 则可利用指数函数的最小二乘法求得  $A$ 、 $B$  和  $\gamma$  的值。在一般情况下,  $1/f$  噪声、 $g-r$  噪声和白噪声均存在, 需同时精确提取上述6个参数, 这是一个多参数非线性拟合问题, 求解甚为困难。文献[4]提出利用  $S(f)f$  谱的凸峰来有效地分离  $g-r$  分量, 可较准确地确定其参数  $C$  和  $f_0$ 。这种  $S(f)f$  谱法特别适用于有多个  $g-r$  分量存在的情况, 但难以同时精确提取 $1/f$  噪声和白噪声参数, 特别是不能用来确定在物理分析中颇为有用的频率指数因子  $\gamma$  和  $\alpha$ 。本文提出的梯度寻优-线性展开算法, 可以从实测频谱中同时精确提取 $1/f$  噪声、 $g-r$  噪声和白噪声的6个表征参数, 经过对不同器件的实测频谱进行拟合分析, 其收敛性和拟合精度令人满意。

本文于1995—02—21收到, 1995—05—02修改定稿。

## 2 分析方法

欲将一组实测数据  $(x_i, y_i)$ , 与一个参数为  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 的非线性函数  $y(x)$  相拟合。按最小二乘法原理, 这就是要找到一组参数  $a_i$  的值, 使

$$\chi^2 \equiv \frac{1}{n} \sum_i \frac{[y_i - y(x_i)]^2}{y^2(x_i)} \quad (2)$$

达到最小。 $\chi^2$  称为拟合优度, 可视为  $n$  个参数  $a_i$  的连续函数, 构成一个  $n$  值空间的超表面, 采取一定的方法搜寻整个空间可求得  $\chi^2$  的极小值。不同的非线性函数形式可能需要采取不同的寻优方法。

梯度寻优法<sup>[5]</sup>是同时改变所有的参数  $a_i$ , 但各个参数变化的相对大小要进行调整, 以保证在参数空间的寻优路径的总方向沿着  $\chi^2$  的最速下降方向 (即梯度的相反方向)。 $\chi^2$  的梯度可表示为

$$\nabla \chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \chi^2}{\partial a_i} \hat{a}_i \quad (3)$$

式中,  $\hat{a}_i$  为一单位矢量。首先用小步长沿着原始梯度的相反方向搜寻, 计算  $\chi^2$  的数值, 直到  $\chi^2$  值再次开始增加。在开始增加的这一点上, 重新计算梯度, 寻优过程再沿新的方向进行。将这种方法用于拟合式 (1) 函数, 发现它可以在搜寻开始不久很快就接近极小值, 但是它向最终的极小值底部逼近时收敛得相当慢。这样, 我们不得不寻求另一种非线性拟合方法来确定真正的极小值的位置。

函数线性展开算法<sup>[6]</sup>是把非线性拟合函数按其参数  $a_i$  的函数作泰勒多项式展开, 并略去二次以上的高次项, 然后采用线性最小二乘法确定参数增量  $\delta a_i$  的最佳值。即令

$$\chi^2 \approx \chi_0^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \chi_0^2}{\partial a_i} \delta a_i \quad (4)$$

式中,  $\chi_0^2$  是  $a_i$  取初始值时的  $\chi^2$  值。令  $\chi^2$  对每个  $a_i$  的导数为零, 即

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_k} = \frac{\partial \chi_0^2}{\partial a_k} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 \chi_0^2}{\partial a_i \partial a_k} \delta a_i \right) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

这是一组关于  $\delta a_i$  的  $n$  个线性联立方程, 可通过矩阵求逆方法来进行求解。采用这种线性展开算法, 当由极小值附近的点出发时, 能很快地收敛到最小值, 但其固有的缺点是如果开始点位于  $\chi^2$  超平面的近似抛物区之外, 就不能精确地接近最小值。

根据以上分析, 梯度寻优法与函数线性展开法二者之间具有互补性。实际上可以证明<sup>[6]</sup>, 这两种方法的路径方向是差不多互相垂直的, 而最优方向则位于这两个方向之间。因此, 最好是把两种算法结合起来运用, 在搜寻的第一阶段采用梯度法; 当寻优开始收敛时, 则采用展开法。我们的作法是, 引入一个常数因子  $1 + \lambda$ , 将它乘到方程 (5) 求解矩阵的对角元素上, 用来控制在两个极端算法之间的内插。当  $\lambda \gg 1$  时, 接近于小步长的梯度寻优法; 当  $\lambda \ll 1$  时, 则为线性展开法。计算时,  $\lambda$  值应选得小到足以能利用展开法的优点, 但又要大得足以保证  $\chi^2$  能变小, 具体步骤如下: (1) 计算  $\chi^2$ ; (2) 由  $\lambda = 0.001$  起步; (3) 由这样的  $\lambda$  计算  $\delta a$  和  $\chi^2(a + \delta a)$ ; (4) 若  $\chi^2(a + \delta a) > \chi^2(a)$ , 把  $\lambda$  增大10倍, 再重复步骤 (3); (5) 若  $\chi^2(a + \delta a) < \chi^2(a)$ , 把  $\lambda$  缩小10倍, 然后将  $a' = a + \delta a$  作为新的起点, 以  $a'$  代替  $a$  返回步骤 (3)。

在用上述算法进行拟合之前,必须确定各个拟合参数的初始值。首先,我们采用指数函数最小二乘法来确定 $1/f$ 噪声和白噪声参数的初始值。令 $C=0$ ,式(1)成为

$$S(f) = A + (B/f^\gamma) \quad (6)$$

则问题就简化为 $A$ 、 $B$ 、 $\gamma$ 三参量的提取。已知实测噪声频谱曲线的频率点为 $f(i)$ ,相应的功率谱密度值为 $S(f_i)$ , $i=1, 2, \dots, m$ 。设 $1/f$ 噪声的主导频率区间为 $[f(i), f(j)]$ ,则白噪声的主导频率区间为 $[f(j), f(m)]$ , $1 < j < m$ 。于是,由指数函数的最小二乘法拟合公式,可求得这种情况下的3个噪声参数 $A(j)$ 、 $B(j)$ 和 $\gamma(j)$ 。由该组参数得到的拟合噪声谱为

$$S_j(f) = A(j) + [B(j)/f^{\gamma(j)}] \quad (7)$$

对应的拟合曲线与实测曲线的方差平均值为

$$\sigma^2(j) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{S(f_i) - S_j(f_i)}{[S(f_i) + S_j(f_i)]/2} \right\}^2 \quad (8)$$

令 $j=2$ 至 $m-2$ ,可得到 $m-4$ 组的 $A(j)$ 、 $B(j)$ 、 $\gamma(j)$ 、 $\sigma(j)$ 值。设其中最小的 $\sigma$ 对应的 $j$ 值为 $j_{opt}$ ,则 $A(j_{opt})$ 、 $B(j_{opt})$ 、 $\gamma(j_{opt})$ 即为所求的初始 $1/f$ 噪声和白噪声参数值。白噪声区与 $1/f$ 噪声区的转折频率 $f_L$ 由下式求出:

$$f_L = f |_{A=B/f^\gamma} = (B/A)^{1/\gamma} \quad (9)$$

然后,利用 $S(f)f$ 谱变换法<sup>[4]</sup>确定 $g-r$ 噪声幅度和转折频率的初始值。将实测噪声频谱 $S(f)$ 变换为 $S(f)f$ 谱,求在频率区间 $f < f_L$ 内的极大值出现的频率点 $f_{max}$ 及其谱值 $S(f_{max})f_{max}$ ,则

$$f_0 = f_{max} \quad (10)$$

$$C = 2[S(f_{max})f_{max} - B - Af_{max}]/f_{max} \quad (11)$$

式中, $B$ 和 $A$ 为已提取到的 $1/f$ 噪声和白噪声的幅度值。 $\alpha$ 的初始值取其典型值2。

### 3 分析实例

我们组建的电子器件低频噪声频谱自动测试系统的构成如图1所示。被测器件加上规定的偏置电压或电流以及源电阻,其输出噪声电压经低噪声前置放大器PARC113放大后,由频谱分析仪HP3582A进行谱分析。测量有源器件的等效输入噪声时,要首先输入HP3582A所带白噪声源,测量器件的传递函数。测量噪声谱时,频域带宽滤波采用海宁(Hanning)窗;测量传递函数时,采用均匀(Uniform)窗。RMS平均次数可在4~256之间分级调节。测量的最大频率范围为0.02Hz~25.6kHz。采用256次平均时,系统重复测量误差小于5%。HP3582A的功能控制以及测试频谱数据的分析、作图和打印输出均由486微机完成。上述谱分析算法已编制成应用软件,作为电子器件低频噪声表征软件NOISETOOL的子功能块。

对于各种器件噪声频谱的分析表明,梯度寻优-线性展开算法均可以很好地收敛,拟合精度亦令人满意。表1给出了对于各种典型半导体器件噪声频谱分析得到的谱成分参数值。图2至图4给出其中3种器件的实测频谱(RMS平均16次)和拟合频谱。将这种方法得到的结果与 $S(f)f$ 谱变换法得到的结果相比较,发现在 $g-r$ 噪声占优势的频率段,两种方法的拟合精度相差不大,而在 $1/f$ 噪声或者白噪声占优势的频率段, $S(f)f$ 谱变换法的拟合精度比本方法低的多,特别是频率指数因子 $\gamma$ 偏离1或者 $\alpha$ 偏离2时,这种情况变得尤其显著,如图2所示。其主要原因有:(1) $S(f)f$ 谱变换法不能得到 $\gamma$ 和 $\alpha$ 的精确值;(2) $S(f)f$

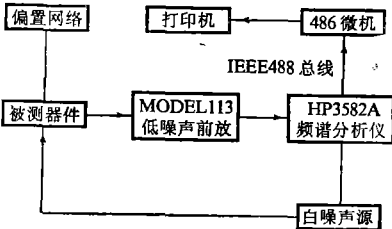


图1 电子器件低频噪声自动测试系统框图

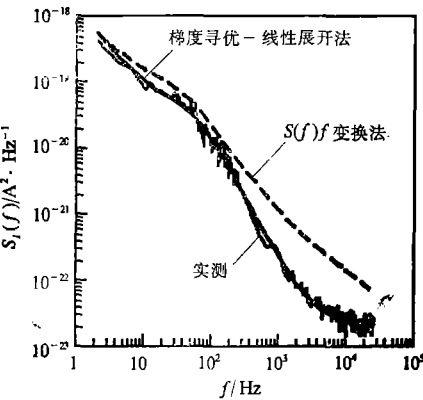


图2 集成NPN晶体管等效输入噪声电流功率谱

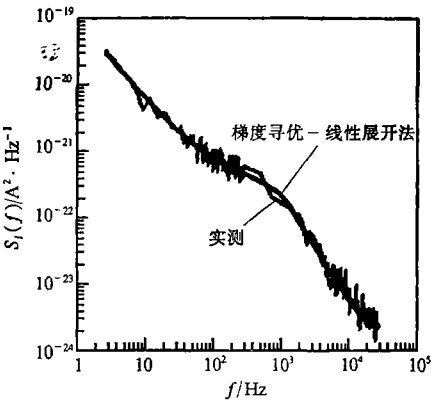


图3 分立PNP晶体管3CG21C等效输入噪声电流功率谱

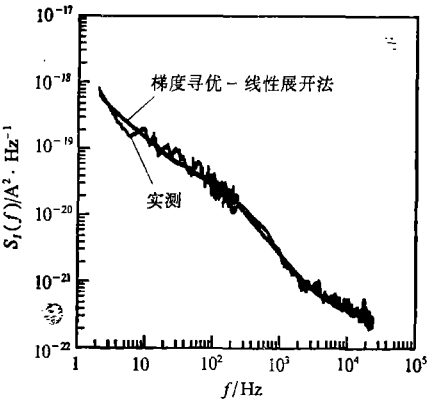


图4 集成运算放大器F007等效输入噪声电流功率谱

表1 半导体器件低频噪声谱成分分析结果

器件类型	$A$ ( $A^2/Hz$ )	$B$ ( $A^2$ )	$\gamma$	$f_L$ (kHz)	$C$ ( $A^2/Hz$ )	$f_0$ (Hz)	$\alpha$	备注
集成NPN管	$1.893 \times 10^{-23}$	$1.451 \times 10^{-18}$	1.422	10.12	$4.160 \times 10^{-20}$	57.48	2.056	见图2
集成PNP管	$1.250 \times 10^{-23}$	$4.695 \times 10^{-19}$	1.070	421.2	$3.598 \times 10^{-19}$	79.12	2.071	
分立NPN管3DG6	$1.233 \times 10^{-23}$	$1.487 \times 10^{-18}$	1.101	31.88	$2.410 \times 10^{-20}$	121.7	2.641	
分立PNP管3CG21	$1.384 \times 10^{-24}$	$5.789 \times 10^{-20}$	1.108	543.8	$3.484 \times 10^{-22}$	884.1	2.109	见图3
齐纳二极管ZW50	$1.123 \times 10^{-14}$	$1.643 \times 10^{-12}$	0.894	0.3184	$1.375 \times 10^{-13}$	29.56	1.762	
通用运放F007	$2.168 \times 10^{-22}$	$1.180 \times 10^{-18}$	1.004	46.95	$1.990 \times 10^{-20}$	218.9	1.804	见图4
中增益运放LFC3	$1.725 \times 10^{-23}$	$6.833 \times 10^{-19}$	1.375	13.75	$5.090 \times 10^{-20}$	53.56	2.031	

谱变换法只利用了实测频谱的局部数据，而本方法为基于所有测试数据的全局寻优方法。

采用FFT变换算法测得的噪声功率谱本身具有一定的起伏，起伏量的大小取决于RMS平均次数的多少，平均次数越多，则起伏方差越小。所以，拟合精度与RMS平均次数有关，由表2数据来看，当平均次数>256时，拟合精度优于5%。由表2数据还可看出，对

表 2 低频噪声谱成分分析精度数据\*

RMS 平均 次数	测试 周期 (s)	$A$ ( $A^2/Hz$ )	$B$ ( $A^2$ )	$\gamma$	$C$ ( $A^2/Hz$ )	$f_0$ (Hz)	$\alpha$	拟合 精度 (%)
16	40	$1.893 \times 10^{-23}$	$1.451 \times 10^{-18}$	1.422	$4.160 \times 10^{-20}$	57.48	2.056	18.21
32	80	$1.608 \times 10^{-23}$	$1.509 \times 10^{-18}$	1.394	$4.032 \times 10^{-20}$	56.73	2.173	14.09
64	160	$1.749 \times 10^{-23}$	$1.337 \times 10^{-18}$	1.450	$3.946 \times 10^{-20}$	55.82	2.010	10.86
128	320	$1.550 \times 10^{-23}$	$1.368 \times 10^{-18}$	1.403	$4.599 \times 10^{-20}$	57.73	2.037	7.471
256	640	$1.811 \times 10^{-23}$	$1.496 \times 10^{-18}$	1.433	$4.481 \times 10^{-20}$	58.12	2.091	4.709
分析误差(%)		7.364	4.788	1.420	5.989	1.930	2.718	

\* 测试样品为集成 NPN 晶体管, 测试频率范围为 2Hz~25.5kHz。

于同一器件, 对采用不同 RMS 平均数测得的频谱进行拟合, 所得到的成分参数值十分接近, 平均相对误差小于系统测试误差(5%)。因此, 我们不必采用过高的平均次数, 即可得到较精确的成分参数数据, 从而可大大缩短测试所需时间。这是可以预期的, 因为 RMS 平均只起平滑的作用, 并不能改变噪声信号的固有幅度。

4 结论

本文将最优化技术中的梯度寻优算法与函数展开算法结合起来, 从实测器件噪声频谱中, 成功地提取出1/f 噪声、g-r 噪声和白噪声的六个低频噪声成分参数。作为基于全部噪声频谱数据的多参数全局优化方法, 这种方法较之基于局部数据的分段提取方法, 具有更为普遍的适用性和更高的拟合精度。对于各种器件实测噪声频谱分析的应用效果, 已证明了这一点。然而, 要将这种方法用于具有多个 g-r 噪声分量的频谱分析, 仍有待于进一步研究和改进。

参 考 文 献

1 Jones B K. Electrical noise as a measure of quality and reliability in electron devices. Advances in Electronics and Electron Physics. Academic Press. 1994, 87:1~204

2 庄奕琪, 孙青. 半导体器件中的噪声及其低噪声化技术. 北京: 国防工业出版社, 1993

3 戴逸松. 低频噪声测量技术的现状及最新进展. 计量学报, 1994, 15(4):314~319

4 戴逸松. 晶体管 PN 结缺陷形成的 g-r 噪声研究. 半导体学报, 1989, 10(1):48~54

5 程正兴. 数据拟合. 西安: 西安交通大学出版社, 1986

6 Kaufman L K, Pereyra V. A method for separable nonlinear least squares problems with separable nonlinear equality constraints. SIAM J Number Anal, 1978, 15(1):12~20

## Optimization Analysis on All Components of Low-frequency Noise Spectrum for Electron Devices

Zhuang Yiqi, Sun Qing

(Xidian University, Xi'an 710071)

Hou Xun

(Xi'an Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Xi'an 710068)

**Abstract**—All  $1/f$  noise,  $g-r$  noise and white noise components of low-frequency noise spectrum for electron devices may be determined by the united algorithm of gradient optimization and linear series development. The method has been used successfully to analyze the low-frequency noise spectrum of semiconductor devices and is shown to have good convergence and fitting accuracy.

**Key words:** Low-frequency noise; Electron device; Optimization analysis