量子光学学报 8(1)：30～35，2002

Acta Sinica Quantum Optica

文章编号：1007－6654(2002)01－0030－06

多模叠加态光场的不等阶 N_j 次 H 压缩

王菊霞[1]，杨志勇[2,3]，侯洵[2,4]

(1.渭南师范学院量子光学与光子学研究室，渭南师范学院 物理系，陕西 渭南 714000； 2.西北大学光子学与光子技术研究所，西北大学光电子技术省级重点开放实验室，陕西 西安 710069； 3.西北大学现代物理研究所，陕西 西安 710069； 4.中国科学院西安光学精密机械研究所，瞬态光学技术国家重点实验室，陕西 西安 710068)

摘要：非对称多模叠加态光场：$|\Psi^{(ab)}>_q = C_{pq}^{(aI)}|\{iZ_j^{(a)^*}\}.>_q + C_{nq}^{(bI)}|\{-iZ_j^{(b)^*}\}.>_q$，利用多模辐射场的不等阶压缩一般理论，首次对态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 的广义非线性不等阶 N_j 次方 H 压缩特性进行了详细地研究，结果表明：在不同的条件下，态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 的两个正交分量分别呈现周期性变化的、任意不等阶 N_j 次方 H 压缩效应、N_j－H 最小测不准态，说明态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 是一种典型的非经典多模光场。

关键词：非对称多模叠加态； 不等阶 N_j 次方 H 压缩； N_j－H 最小测不准态； 非经典多模光场

中图分类号：O431 **文献标识码**：A

有关多模辐射场广义非线性高阶压缩问题的研究工作，目前限于单、双模或多模等阶压缩[1～10]，而更具有普遍意义的各模压缩阶数不同的不等阶压缩问题的研究迄今未见任何报导，不等阶多模压缩问题的研究将为实验提供更直接的理论指导，因此，我们非常有必要对光场的压缩及高阶压缩效应进行更深入地研究。N_j 次方 H 压缩效应，即多模辐射场的广义非线性不等阶高阶和压缩，可通过多模辐射场的参量上转换，即和频过程来产生。本文利用多模辐射场的广义非线性不等阶高阶压缩一般理论[12]，首次详细研究了一种强度不等的非对称两态叠加多模叠加态光场 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 的不等阶 N_j 次方 H 压缩效应，大量地计算、分析得出：在一定的量子化条件下，态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 呈现出周期性变化的、任意不等阶 N_j 次方 H 压缩效应；且两正交分量的压缩总是存在周期性的互补关系；在特殊条件下，态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 还可处于 N_j－H 最小测不准态，这些纯量子效应说明该态属于非经典多模光场。

1 态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 的基本结构

态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 是由两个宏观上完全可以分辨的多模复共轭相干态 $|\{iZ_j^{(a)^*}\}>_q$ 和多模复共轭相干态的相反态 $|\{-iZ_j^{(b)^*}\}>_q$ 的线性叠加构成的，因此，态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 实质上是一种多模薛定谔猫态光场[11]，其数学表式为

$$|\Psi^{(ab)}>_q = C_{pq}^{(aI)}|\{iZ_j^{(a)^*}\}>_q + C_{nq}^{(bI)}|\{-iZ_j^{(b)^*}\}>_q \qquad (1)$$

式中

$$C_{pq}^{(aI)} = r_{pq}^{(aI)}\cdot\exp[\mathrm{i}\theta_{pq}^{(aI)}] \qquad (2)$$

$$C_{nq}^{(bI)} = r_{nq}^{(bI)}\cdot\exp[\mathrm{i}\theta_{nq}^{(bI)}]$$

收稿日期：2001－07－14

基金项目：陕西省自然科学基金(2000SL10)；陕西省教委专项科研基金(99JK091)．

作者简介：王菊霞(1965－)，女，陕西合阳人，现为渭南师范学院量子光学与光子学研究室副教授，目前主要从事量子光学、非线性光学等方面的研究．

$$Z_j^{(a)} = R_j^{(a)} \cdot \exp[\mathrm{i}\varphi_i^{(a)}] \quad (j = 1,2,3\cdots,q) \tag{3}$$

$$Z_j^{(b)} = R_j^{(b)} \cdot \exp[\mathrm{i}\varphi_j^{(b)}] \quad (j = 1,2,3\cdots,q)$$

$$\begin{aligned}
&|\{iZ_j^{(a)*}\}.>_q \\
&=|iZ_1^{(a)*}, iZ_2^{(a)*}, iZ_3^{(a)*}, \cdots, iZ_q^{(a)*}> \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{q}|Z_j^{(a)*}|^2\right)\right] \\
&\cdot \sum_{\{n_j\}=0}^{\infty}\left\{\prod_{j=1}^{q}\left[\frac{(iZ_j^{(a)*})^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}\right]\right\}\cdot|\{n_j\}\cdot>_q
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&|\{-iZ_j^{(b)*}\}\cdot>_q \\
&=|-iZ_1^{(b)*}, -iZ_2^{(b)*}, -iZ_3^{(b)*}, \cdots -iZ_q^{(b)*}> \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{q}|Z_j^{(b)*}|^2\right)\right] \\
&\cdot \sum_{\{n_j\}=0}^{\infty}\left\{\prod_{j=1}^{q}\left[\frac{(-iZ_j^{(b)*})^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}\right]\right\}\cdot|\{n_j\}\cdot>_q
\end{aligned}$$

其中，$|\{n_j\}>_q = |n_1, n_2, n_3, \cdots, n_{q-1}, n_q\}$ 为多模光子数态，q 为光场的腔模(即纵模)总数。

态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 的正交归一化条件为

$$\begin{aligned}
&{}_q<\Psi^{(ab)}|\Psi^{(ab)}>_q \\
&= r_{pq}^{(aI)2} + r_{nq}^{(bI)2} + 2r_{pq}^{(aI)}r_{nq}^{(bI)} \\
&\cdot \exp\left\{\sum_{j=1}^{q}\left[-\frac{1}{2}(R_j^{(a)2} + R_j^{(b)2})\right.\right. \\
&\left.\left.- R_j^{(a)} \cdot R_j^{(b)} \cdot \cos(\varphi_j^{(a)} - \varphi_j^{(b)})\right]\right\} \\
&\cdot \cos\left\{\sum_{j=1}^{q}[R_j^{(a)} \cdot R_j^{(b)} \cdot \sin(\varphi_j^{(a)} - \varphi_j^{(b)})]\right. \\
&\left.+ [\theta_{pq}^{(aI)} - \theta_{nq}^{(bI)}]\right\} = 1
\end{aligned} \tag{5}$$

2　态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 的不等阶 N_j 次方 H 压缩效应与 N_j—H 最小测不准态

2.1　一般理论结果

利用本文的式(1)～(5)及多模辐射场的广义非线性不等阶 N_j 次方 H 压缩的定义[12]，经大量繁复的计算可求得态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 的不等阶 N_j 次方 H 压缩的一般理论结果如下：

$$\begin{aligned}
G_1 &= 4<\Delta H_1^2(N_j)_q> - <[B_q(N_j), B_q^{+}(N_j)].> \\
&= 2<\prod_{j,j'=1}^{q} a_j^{+N_j} a_{j'}^{N_{j'}}> \\
&\quad +<\prod_{j,j'=1}^{q} a_j^{+N_j} a_{j'}^{+N_{j'}} + \prod_{j,j'=1}^{q} a_j^{N_j} a_{j'}^{N_{j'}}> \\
&\quad -<\prod_{j=1}^{q} a_j^{+N_j} + \prod_{j=1}^{q} a_j^{N_j}>^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2r_{pq}^{(aI)2}\left[\prod_{j=1}^{q} R_j^{(a)2N_j}\right] + 2r_{nq}^{(bI)2}\left[\prod_{j=1}^{q} R_j^{(b)2N_j}\right] \\
&+ 4r_{pq}^{(aI)}r_{nq}^{(bI)} \cdot \exp\left\{\sum_{j=1}^{q}\left[-\frac{1}{2}(R_j^{(a)2} + R_j^{(b)2})\right.\right. \\
&\left.\left.- R_j^{(a)} \cdot R_j^{(b)} \cdot \cos(\varphi_j^{(a)} - \varphi_j^{(b)})\right]\right\} \\
&\cdot \left[\prod_{j=1}^{q}(-1)^{N_j} R_j^{(a)N_j} \cdot R_j^{(b)N_j}\right] \\
&\cdot \cos\left\{\sum_{j=1}^{q}[N_j(\varphi_j^{(a)} - \varphi_j^{(b)})]\right. \\
&- \sum_{j=1}^{q}[R_j^{(a)} \cdot R_j^{(b)} \cdot \sin(\varphi_j^{(a)} - \varphi_j^{(b)})] \\
&\left.- [\theta_{pq}^{(aI)} - \theta_{nq}^{(bI)}]\right\} \\
&+ 2r_{pq}^{(aI)2}\left[\prod_{j=1}^{q}(-1)^{N_j} R_j^{(a)2N_j}\right] \\
&\cdot \cos\left[2\sum_{j=1}^{q}(N_j\varphi_j^{(a)})\right] + 2r_{nq}^{(bI)2}\left[\prod_{j=1}^{q}(-1)^{N_j} R_j^{(b)2N_j}\right] \\
&\cdot \cos\left[2\sum_{j=1}^{q}(N_j\varphi_j^{(b)})\right] \\
&+ 2r_{pq}^{(aI)}r_{nq}^{(bI)} \cdot \exp\left\{\sum_{j=1}^{q}\left[-\frac{1}{2}(R_j^{(a)2} + R_j^{(b)2})\right.\right. \\
&\left.\left.- R_j^{(a)} \cdot R_j^{(b)} \cdot \cos(\varphi_j^{(a)} - \varphi_j^{(b)})\right]\right\} \\
&\cdot \left\{\left[\prod_{j=1}^{q}(-1)^{N_j} R_j^{(a)2N_j}\right] \cdot \cos\left\{2\left[\sum_{j=1}^{q}(N_j\varphi_j^{(a)})\right]\right.\right. \\
&- \sum_{j=1}^{q}[R_j^{(a)} \cdot R_j^{(b)} \cdot \sin(\varphi_j^{(a)} - \varphi_j^{(b)})] \\
&\left.- [\theta_{pq}^{(aI)} - \theta_{nq}^{(bI)}]\right\} \\
&+ \left[\prod_{j=1}^{q}(-1)^{N_j} R_j^{(b)2N_j}\right] \cdot \cos\left\{2\left[\sum_{j=1}^{q}(N_j\varphi_j^{(b)})\right]\right. \\
&+ \sum_{j=1}^{q}[R_j^{(a)} R_j^{(b)} \sin(\varphi_j^{(a)} - \varphi_j^{(b)})] \\
&\left.\left.+ [\theta_{pq}^{(aI)} - \theta_{nq}^{(bI)}]\right\}\right\} \\
&- 4\left\{r_{pq}^{(aI)2}\left[\prod_{j=1}^{q} R_j^{(a)N_j}\right] \cdot \cos\left[\sum_{j=1}^{q}\left(N_j\varphi_j^{(a)} - N_j\frac{\pi}{2}\right)\right]\right. \\
&+ r_{nq}^{(bI)2}\left[\prod_{j=1}^{q} R_j^{(b)N_j}\right] \cdot \cos\left[\sum_{j=1}^{q}\left(N_j\varphi_j^{(b)} + N_j\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&+ r_{pq}^{(aI)}r_{nq}^{(bI)} \cdot \exp\left\{\sum_{j=1}^{q}\left[-\frac{1}{2}(R_j^{(a)2} + R_j^{(b)2})\right.\right. \\
&\left.\left.- R_j^{(a)} \cdot R_j^{(b)} \cdot \cos(\varphi_j^{(a)} - \varphi_j^{(b)})\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot\{[\prod_{j=1}^{q}R_j^{(a)N_j}]\\
&\cdot\cos\{[\sum_{j=1}^{q}(N_j\varphi_j^{(a)}-N_j\frac{\pi}{2})]\\
&\quad-\sum_{j=1}^{q}[R_j^{(a)}R_j^{(b)}\sin(\varphi_j^{(a)}-\varphi_j^{(b)})]\\
&\quad-[\theta_{pq}^{(aI)}-\theta_{nq}^{(bI)}]\}\\
&+\{[\prod_{j=1}^{q}R_j^{(b)N_j}]\cdot\cos\{[\sum_{j=1}^{q}(N_j\varphi_j^{(b)}+N_j\frac{\pi}{2})]\\
&\quad+\sum_{j=1}^{q}[R_j^{(a)}R_j^{(b)}\sin(\varphi_j^{(a)}-\varphi_j^{(b)})]\\
&\quad+[\theta_{pq}^{(aI)}-\theta_{nq}^{(bI)}]\}\}\}\}^{2}
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

$$
\begin{aligned}
G_2=&\,4\langle\Delta H_2^2(N_j)_q\rangle-\langle[B_q(N_j),B_q^{+}(N_j)].\rangle\\
=&\,2\langle\prod_{j,j'=1}^{q}a_j^{+N_j}a_{j'}^{N_{j'}}\rangle\\
&-\langle\prod_{j,j'=1}^{q}a_j^{+N_j}a_{j'}^{+N_{j'}}+\prod_{j,j'=1}^{q}a_j^{N_j}a_{j'}^{N_{j'}}\rangle\\
&+\langle\prod_{j=1}^{q}a_j^{+N_j}-\prod_{j=1}^{q}a_j^{N_j}\rangle^{2}\\
=&\,2r_{pq}^{(aI)2}[\prod_{j=1}^{q}R_j^{(a)2N_j}]+2r_{nq}^{(bI)2}[\prod_{j=1}^{q}R_j^{(b)2N_j}]\\
&+4r_{pq}^{(aI)}r_{nq}^{(bI)}\cdot\exp\{\sum_{j=1}^{q}[-\frac{1}{2}(R_j^{(a)2}+R_j^{(b)2})\\
&\quad-R_j^{(a)}\cdot R_j^{(b)}\cdot\cos(\varphi_j^{(a)}-\varphi_j^{(b)})]\}\\
&\cdot[\prod_{j=1}^{q}(-1)^{N_j}R_j^{(a)N_j}\cdot R_j^{(b)N_j}]\\
&\cdot\cos\{\sum_{j=1}^{q}[N_j(\varphi_j^{(a)}-\varphi_j^{(b)})]\\
&\quad-\sum_{j=1}^{q}[R_j^{(a)}\cdot R_j^{(b)}\cdot\sin(\varphi_j^{(a)}-\varphi_j^{(b)})]\\
&\quad-[\theta_{pq}^{(aI)}-\theta_{nq}^{(bI)}]\}\\
&-2r_{pq}^{(aI)2}[\prod_{j=1}^{q}(-1)^{N_j}R_j^{(a)2N_j}]\\
&\cdot\cos[2\sum_{j=1}^{q}(N_j\varphi_j^{(a)})]\\
&-2r_{nq}^{(bI)2}[\prod_{j=1}^{q}(-1)^{N_j}R_j^{(b)2N_j}]\\
&\cdot\cos[2\sum_{j=1}^{q}(N_j\varphi_j^{(b)})]\\
&-2r_{pq}^{(aI)}r_{nq}^{(bI)}\cdot\exp\{\sum_{j=1}^{q}[-\frac{1}{2}(R_j^{(a)2}+R_j^{(b)2})\\
&\quad-R_j^{(a)}\cdot R_j^{(b)}\cdot\cos(\varphi_j^{(a)}-\varphi_j^{(b)})]\}\\
&\cdot\{[\prod_{j=1}^{q}(-1)^{N_j}R_j^{(a)2N_j}]\cdot\cos\{2[\sum_{j=1}^{q}(N_j\varphi_j^{(a)})]\\
&\quad-\sum_{j=1}^{q}[R_j^{(a)}R_j^{(b)}\sin(\varphi_j^{(a)}-\varphi_j^{(b)})]\\
&\quad-[\theta_{pq}^{(aI)}-\theta_{nq}^{(bI)}]\}\\
&+[\prod_{j=1}^{q}(-1)^{N_j}R_j^{(b)2N_j}]\cdot\cos\{2[\sum_{j=1}^{q}(N_j\varphi_j^{(b)})]\\
&\quad+\sum_{j=1}^{q}[R_j^{(a)}R_j^{(b)}\sin(\varphi_j^{(a)}-\varphi_j^{(b)})]\\
&\quad+[\theta_{pq}^{(aI)}-\theta_{nq}^{(bI)}]\}\}\\
&-4\{r_{pq}^{(aI)2}[\prod_{j=1}^{q}R_j^{(a)N_j}]\cdot\sin[\sum_{j=1}^{q}(N_j\varphi_j^{(a)}-N_j\frac{\pi}{2})]\\
&+r_{nq}^{(bI)2}[\prod_{j=1}^{q}R_j^{(b)N_j}]\cdot\sin[\sum_{j=1}^{q}(N_j\varphi_j^{(b)}+N_j\frac{\pi}{2})]\\
&+r_{pq}^{(aI)}r_{nq}^{(bI)}\cdot\exp\{\sum_{j=1}^{q}[-\frac{1}{2}(R_j^{(a)2}+R_j^{(b)2})\\
&\quad-R_j^{(a)}\cdot R_j^{(b)}\cdot\cos(\varphi_j^{(a)}-\varphi_j^{(b)})]\}\\
&\cdot\{[\prod_{j=1}^{q}R_j^{(a)N_j}]\cdot\sin\{[\sum_{j=1}^{q}(N_j\varphi_j^{(a)}-N_j\frac{\pi}{2})]\\
&\quad-\sum_{j=1}^{q}[R_j^{(a)}\cdot R_j^{(b)}\cdot\sin(\varphi_j^{(a)}-\varphi_j^{(b)})]\\
&\quad-[\theta_{pq}^{(aI)}-\theta_{nq}^{(bI)}]\}\\
&+[\prod_{j=1}^{q}R_j^{(b)N_j}]\cdot\sin\{[\sum_{j=1}^{q}(N_j\varphi_j^{(b)}+N_j\frac{\pi}{2})]\\
&\quad+\sum_{j=1}^{q}[R_j^{(a)}R_j^{(b)}\sin(\varphi_j^{(a)}-\varphi_j^{(b)})]\\
&\quad+[\theta_{pq}^{(aI)}-\theta_{nq}^{(bI)}]\}\}\}^{2}
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

2.2 不等阶 N_j 次方 H 压缩效应

2.2.1 第一次正交分量压缩情况

取各模压缩阶数均为奇数阶，即 $N_j=2m_j+1$ ($j=1,2,3,\cdots,q$； $m_j=0,1,2,3\cdots$) 时，如果态间初始相位差满足

$$\theta_{pq}^{(aI)}-\theta_{nq}^{(bI)}\in\left[2K_\theta\pi-\frac{\pi}{2},2K_\theta\pi+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$(K_\theta=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)\qquad (8)$$

时，由式(6)、(7)可求得态 $|\Psi^{(ab)}\rangle_q$ 的压缩情况如下

1) 当 $\varphi_j^{(a)}=K_j^{(a)}\pi$; $\varphi_j^{(b)}=K_j^{(b)}\pi$

$$(K_j^{(a)}=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots;$$
$$K_j^{(b)}=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)\qquad(9)$$

总有

$$G_1=-2r_{pq}^{(aI)}r_{nq}^{(bI)}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{q}(R_j^{(a)}\pm R_j^{(b)})^2\right)\right]\cdot\left[\prod_{j=1}^{q}R_j^{(a)N_j}+\prod_{j=1}^{q}R_j^{(b)N_j}\right]^2\cdot\left\{\cos(\theta_{pq}^{(aI)}-\theta_{nq}^{(bI)})+2r_{pq}^{(aI)}r_{nq}^{(bI)}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{q}(R_j^{(a)}+R_j^{(b)})^2\right)\right]\cdot\sin^2(\theta_{pq}^{(aI)}-\theta_{nq}^{(bI)})\right\}<0\qquad(10)$$

$$G_2=\left[\prod_{j=1}^{q}R_j^{(a)N_j}+\prod_{j=1}^{q}R_j^{(b)N_j}\right]^2\cdot\{[r_{pq}^{(aI)2}+r_{nq}^{(bI)2}]-[r_{pq}^{(aI)2}+r_{nq}^{(bI)2}]^2+4r_{pq}^{(aI)2}r_{nq}^{(bI)2}\}>0\qquad(11)$$

在(9)式中，$K_j^{(a)}$、$K_j^{(b)}$ 同取奇数或同取偶数时，(10)式中的"±"取"+"号；$K_j^{(a)}$、$K_j^{(b)}$ 这两者一个取奇另一个取偶，(10)式中的"±"取"−"号(本文下同)。

2)　当　$\varphi_j^{(a)}=(2K_j^{(a)}+1)\dfrac{\pi}{2}$；

$$\varphi_j^{(b)}=(2K_j^{(b)}+1)\frac{\pi}{2}$$
$$(K_j^{(a)}=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots;$$
$$K_j^{(b)}=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)\qquad(12)$$

时，G_1 同(10)式；G_2 同(11)式，即 $G_1<0$；$G_2>0$.

3)　当　$\varphi_j^{(a)}=K_j^{(a)}\pi$

$$\text{或者 }\varphi_j^{(a)}=(2K_j^{(a)}+1)\frac{\pi}{2}\qquad(13)$$
$$\varphi_j^{(b)}=(2K_j^{(b)}+1)\frac{\pi}{2}$$
$$\varphi_j^{(b)}=K_j^{(b)}\pi$$

其中 $(K_j^{(a)}=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots;\quad K_j^{(b)}=0,\pm1,\pm2,,\pm3,\cdots)$，且取腔模总数为偶数，即 $q=2K(K=1,2,3\cdots)$ 时总有，第二正交分量 $G_2>0$，且形式同(11)式，而第一正交分量为

$$G_1=-2r_{pq}^{(aI)}r_{nq}^{(bI)}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{q}(R_j^{(a)2}+R_j^{(b)2})\right)\right]\cdot\left[\prod_{j=1}^{q}R_j^{(a)(2m_j+1)}\pm\prod_{j=1}^{q}R_j^{(b)(2m_j+1)}\right]^2\cdot\left\{\cos\left\{\sum_{j=1}^{q}[R_j^{(a)}R_j^{(b)}\sin(\varphi_j^{(a)}-\varphi_j^{(b)})]+[\theta_{pq}^{(aI)}-\theta_{nq}^{(bI)}]\right\}+2r_{pq}^{(aI)}r_{nq}^{(bI)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q}[(R_j^{(a)2}+R_j^{(b)2})]\right\}\cdot\sin^2\left\{\sum_{j=1}^{q}[R_j^{(a)}R_j^{(b)}\sin(\varphi_j^{(a)}-\varphi_j^{(b)})]+[\theta_{pq}^{(aI)}-\theta_{nq}^{(bI)}]\right\}\right\}\qquad(14)$$

这种情况下，各模初始相位 $\varphi_j^{(a)}$、$\varphi_j^{(b)}$ 及态间初始相位差 $\theta_{pq}^{(aI)}-\theta_{nq}^{(bI)}$ 已取定，若 $R_j^{(a)}$、$R_j^{(b)}$ 满足

$$\left\{\sum_{j=1}^{q}[R_j^{(a)}R_j^{(b)}\sin(\varphi_j^{(a)}-\varphi_j^{(b)})]+[\theta_{pq}^{(aI)}-\theta_{nq}^{(bI)}]\right\}\in\left[2K_R\pi-\frac{\pi}{2},2K_R\pi+\frac{\pi}{2}\right]$$
$$(K_R=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)\qquad(15)$$

那么，$G_1<0$。

可见，上述三种情况下，态 $\Psi^{(ab)}>_q$ 的第一正交分量总呈现周期性变化的不等阶 N_j 次方 H 压缩效应，每一种情况的压缩程度并不相同，但都与压缩阶数 N_j、两态叠加几率幅 $r_{pq}^{(aI)}r_{nq}^{(bI)}$、态间初始相位差 $\theta_{pq}^{(aI)}-\theta_{nq}^{(bI)}$、平均光子数 $R_j^{(a)2}$、$R_j^{(b)2}$ 以及腔模总数 q 等呈很强的非线性关联；而第二正交分量始终不存在 N_j 次方 H 压缩效应。另外，在 1)、2)情形中，如果 $K_j^{(a)}$、$K_j^{(b)}$ 同取奇数或同取偶数时，q 模中部分(奇数个)模的压缩阶数为奇数阶，其余为偶数阶的条件下，可得出上述同样的结果。

2.2.2　第二正交分量压缩情况与 N_j—H 最小测不准态

取各模压缩阶数为偶数，即 $N_j=2m_j(j=1,2,3,\cdots q;\ m_j=1,2,3\cdots)$，且态间初始相位差处于(8)式所示的闭区间时，那么各模初始相位在不同条件下对应的压缩情况如下：

1)当 $\varphi_j^{(a)}$、$\varphi_j^{(b)}$ 满足式(9)所示条件时，有：

$$G_1=\left[\prod_{j=1}^{q}R_j^{(a)N_j}-\prod_{j=1}^{q}R_j^{(b)N_j}\right]^2\cdot\{[r_{pq}^{(aI)2}+r_{nq}^{(bI)2}]-[r_{pq}^{(aI)2}+r_{nq}^{(bI)2}]^2+4r_{pq}^{(aI)2}r_{nq}^{(bI)2}\}>0\qquad(16)$$

$$G_2=-2r_{pq}^{(aI)}r_{nq}^{(bI)}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{q}(R_j^{(a)}\pm R_j^{(b)})^2\right)\right]\cdot\left[\prod_{j=1}^{q}R_j^{(a)N_j}-\prod_{j=1}^{q}R_j^{(b)N_j}\right]^2\cdot\left\{\cos(\theta_{pq}^{(aI)}-\theta_{nq}^{(bI)})\quad+2r_{pq}^{(aI)}r_{nq}^{(bI)}\right.$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{q}(R_j^{(a)}\pm R_j^{(b)})^2\right)\right]$$

$$\left.\cdot \sin^2(\theta_{pq}^{(al)}-\theta_{nq}^{(bl)})\right\}<0 \tag{17}$$

2)当 $\varphi_j^{(a)}$、$\varphi_j^{(b)}$ 分别满足式(12)所示条件时，有：G_1 同式(16)；G_2 同式(17)，即 $G_1>0$；$G_2<0$.

3)当 $\varphi_j^{(a)}$、$\varphi_j^{(b)}$ 满足式(13)所示两种条件，且仅取腔总数为偶数，即 $q=2K(K=1,2,3\cdots)$ 时均有：G_1 同式(16)，即 $G_1>0$.

$$G_2=-2r_{pq}^{(al)}r_{nq}^{(bl)}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{q}(R_j^{(a)2}+R_j^{(b)2})\right)\right]$$

$$\cdot\left[\prod_{j=1}^{q}R_j^{(a)2m_j}-\prod_{j=1}^{q}R_j^{(b)2m_j}\right]^2$$

$$\cdot\left\{\cos\left\{\sum_{j=1}^{q}[R_j^{(a)}R_j^{(b)}\sin(\varphi_j^{(a)}-\varphi_j^{(b)})]\right.\right.$$

$$\left.+[\theta_{pq}^{(al)}-\theta_{nq}^{(bl)}]\right\}$$

$$+2r_{pq}^{(al)}r_{nq}^{(bl)}\exp\left\{\sum_{j=1}^{q}\left[-\frac{1}{2}(R_j^{(a)2}+R_j^{(b)2})\right]\right\}$$

$$\cdot\sin^2\left\{\sum_{j=1}^{q}[R_j^{(a)}R_j^{(b)}\sin(\varphi_j^{(a)}-\varphi_j^{(b)})]\right.$$

$$\left.\left.+[\theta_{pq}^{(al)}-\theta_{nq}^{(bl)}]\right\}\right\} \tag{18}$$

在此，如果 $R_j^{(a)}$、$R_j^{(b)}$ 的取值满足式(15)所示条件，那么，式(18)对应的 $G_2<0$ 成立。

显然，上述三种情况下，态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 的第二正交分量总呈现周期性变化的不等阶 N_j 次方 H 压缩效应，而第一正交分量始终不存在 N_j 次方 H 压缩效应。同样，上述 1)、2)情形中，如果 $K_j^{(a)}$、$K_j^{(b)}$ 同取奇数或同取偶数时，q 模中部分(偶数个)模的压缩阶数为奇数阶，其余为偶数阶的条件下，可得出相同的结果。

特别值得一提的是，从(16)～(18)式可知：虽然每个模压缩阶数 N_j 不同、各模压缩参数 R_j 不等，但总体上如果满足 $\prod_{j=1}^{q}R_j^{(a)N_j}=\prod_{j=1}^{q}R_j^{(b)N_j}$ 条件，总有 $G_1=G_2=0$，则态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 处于不等阶 N_j-H 最小测不准态。

2.3 讨论

本文的 2.1 和 2.2 表明：态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 的两个正交分量分别呈现不等阶 N_j 次方 H 压缩效应时的压缩结果相同，态间压缩条件也相同，但模间压缩条件正好相反，随着模间压缩条件的变化，第一及第二正交分量的压缩总是呈现周期性的互补关系；若令各模压缩阶数相同且等于 N 时，很容易得出态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 的等阶 N 次方 H 压缩的一般性结论；若令 $N_j=N$、$Z_j^{(a)}=Z_j^{(b)}=Z_j$、$C_{pq}^{(al)}=C_{nq}^{(bl)}=C_q^{(e)}$ 同时成立时，本文一般性的结论将过渡到文献[10]的特殊情形。

3 结论

1)在 $\prod_{j=1}^{q}R_j^{(a)N_j}\neq\prod_{j=1}^{q}R_j^{(b)N_j}$ 的条件下，无论压缩阶数全部取奇数、偶数、还是部分取奇部分取偶，只要构成多模叠加态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 的两个量子光场态对应各模初始相位 $\varphi_j^{(a)}$、$\varphi_j^{(b)}$ 平均光子数 $R_j^{(a)2}$、$R_j^{(b)2}$、态间初始相位差 $\theta_{pq}^{(al)}-\theta_{nq}^{(bl)}$ 等分别满足一定的量子化条件(或者在一些特定的闭区间内连续取值)，则态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 的第一及第二正交分量均可分别呈现出不等阶 N_j 次方 H 压缩效应；且两个正交分量的压缩效应总是存在周期性的互补关系；各不同阶的 N_j 次方 H 压缩效应，既互相独立，又可以同时存在。

2)在 $\prod_{j=1}^{q}R_j^{(a)N_j}=\prod_{j=1}^{q}R_j^{(b)N_j}$ 的条件下，各模压缩阶数取偶数，或者其中包含偶数个模的压缩阶数取奇数，且 $\varphi_j^{(a)}$、$\varphi_j^{(b)}$、$\theta_{pq}^{(al)}-\theta_{nq}^{(bl)}$、及 $R_j^{(a)}$、$R_j^{(b)}$ 等分别满足一定的量子化条件(或者在一些特定的闭区间内连续取值)，则态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 可处于不等阶 N_j-H 最小测不准态。

3)在各模压缩阶数都等于 N 时，不难得出态 $|\Psi^{(ab)}>_q$ 的等阶 N 次方 H 压缩效应的结论；当 $N_j=N$、$Z_j^{(a)}=Z_j^{(b)}=Z_j$、$C_{pq}^{(al)}=C_{nq}^{(bl)}=C_q^{(e)}$ 同时成立时，本文一般性的结论将过渡到文献[10]的特殊情形。

参考文献：

[1] ZHANG Z M, LEI Xu, CHAI Jin-lin, LI Fu-li. A new kind of higher-order squeezing of radiation field [J]. *Phys Lett*, 1990, **A150**(1): 27-30.

[2] HILLERY M. Sum and difference squeezing of the electromagnetic field [J]. *Phys Rev*, 1989, **A40**(6): 3147-3155.

[3] 彭堃墀, 黄茂全, 刘晶, 等. 双模光场压缩态的实验研究 [J]. 物理学报, 1993, **42**(7): 1079-1085.

[4] 杨志勇, 侯洵. 一种双模叠加态光场的两种非线性高阶压缩特性研究 [J]. 光子学报, 1998, **27**(4): 289-299.

[5]　侯洵，杨志勇. 第Ⅰ类两态叠加多模叠加态光场的非线性高阶压缩特性研究 [J]. 光子学报，1998，**27**(10)：865－878.

[6]　杨志勇，侯洵. 多模辐射场的广义非线性高阶差压缩——N 次方 Y 压缩的一般理论 [J]. 光子学报，1998，**27**(12)：1065－1069.

[7]　王菊霞. 光场的压缩与高阶压缩 [J]. 渭南师专学报(自然科学版)，1999，**14**(5)：15－20.

[8]　杨志勇，侯洵. 第Ⅱ类两态叠加多模叠加态光场的非线性高阶压缩特性研究 [J]. 光子学报，1998，**27**(11)：961－974.

[9]　侯洵，杨志勇，许定国，等. 第Ⅲ类及第Ⅳ类两态叠加多模叠加态光场的等阶 N 次方压缩与等阶 N 次方 H 压缩——兼论"相似压缩"与"压缩简并"现象 [J]. 光子学报，2000，**29**(5)：385－395.

[10]　陈永庄，杨志勇，许定国，等. 多模复共轭虚偶相干态光场的等阶 N 次方 Y 压缩与等阶 N 次方 H 压缩 [J]. 光子学报，2000，**29**(10)：876－884.

[11]　吴锦伟，郭光灿. "薛定谔猫"——宏观量子叠加态 [J]. 物理，1995，**24**(5)：269－273.

[12]　杨志勇，侯洵. 多模辐射场的广义非线性不等阶高阶压缩的一般理论 [J]. 光子学报，1999，**28**(5)：385－392.

The Property of Generalized Nonlinear Unequalled－order N_j－th Power H－squeezing in a New Type of Unsymmetrical Multi－mode Superposition State Light field

WANG Ju－xia[1]，　YANG Zhi－yong[2,3]，　HOU Xun[2,4]

(1. *Research Section of Quantum Optics & Photonics*，*and Physics Department*，*Weinan Normal College*，*Weinan* 714000，*P. R. C*；　2. *Institute of Photonics & Photon－Technology*，*and Provincial Key Laboratory of Photoelectronic Technology*，*Northwest University*，*Xi'an* 710069，*P. R. C*；　3. *Institute of Modern Physics*，*Northwest University*，*Xi'an* 710069，*P. R. C*；　4. *Xi'an Institute of Optics & Precision Mechanics*，*and State Key Laboratory of Transient Optical Technology*，*the Academy of Sciences of China*，*Xi'an* 710068，*P. R. C*.)

Abstract: The State $|\Psi^{(ab)}\rangle_q = C_{pq}^{(aI)}|\{iZ_j^{(a)^*}\}\rangle_q + C_{nq}^{(bI)}|\{-iZ_j^{(b)^*}\}\rangle_q$ is a new type of unsymmetrical multi－mode superposition state light field. By using the unequalled－order squeezing general theory of multi－mode ridiative light field，the property of generalized nonlinear unequalled－order N_j－thpower H－squeezing of the state $|\Psi^{(ab)}\rangle_q$ mentioned above is studied firstly in detail. It is found that the two perpendicular component of the state $|\Psi^{(ab)}\rangle_q$ can presents respectively any unequalled－order N_j－th power H－squeezing effect that changes periodically and unequalled－order N_j－H minimum uncertainty state under the different some conditions. The results show that the state $|\Psi^{(ab)}\rangle_q$ is a kind of typical nonclassical multi－mode light field.

Key words: unsymmetrical multi－mode superposition state；　unequalled－order N_j－th Power H－squeezing；　N_j－H minimum uncertainty state；　Nonclassical multi－mode light field